



TITLE:

液体で満たされた多孔質媒質中での熱物質輸送を伴う対流現象(II) (非線形波動現象の研究の新たな進展)

AUTHOR(S):

吉永, 隆夫; 原, 知子

CITATION:

吉永, 隆夫 ...[et al]. 液体で満たされた多孔質媒質中での熱物質輸送を伴う対流現象(II) (非線形波動現象の研究の新たな進展). 数理解析研究所講究録 2012, 1800: 156-160

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/173020>

RIGHT:

液体で満たされた多孔質媒質中での熱物質輸送を伴う 対流現象 (II)

大阪大学 (Osaka Univ.) 吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)
神戸山手短期大学 (Kobe-Yamate College) 原知子 (Tomoko Hara)

1 はじめに

古くからある加熱調理法のひとつに「煮る」があるが、「焼く」や「揚げる」などの料理法と異なり、煮汁の熱対流により食材を比較的緩やかかつ長時間にわたり加熱する。このような料理法に関する学術的な研究は、これまで個々の食材内部での伝熱の影響が主に調べられてきた^{1,2)}。しかし、適切な加熱条件を知るためには、このような伝熱のみならず、煮汁の温度、濃度分布の食材への影響などを知る必要があるが、現象が複雑になるためこのような効果は考慮されてこなかった。

最近、「揚げる」調理法において食材周囲の油が食材内部へどのような影響を及ぼすかという問題が、油と食材間の相互作用を考慮したモデルにより数学的に調べられた³⁾。この場合、現象が食材近傍での熱物質輸送に限られることから、解析では食材を含むきわめて狭い領域での空間 1 次元解析で比較的よい近似となっている。しかし、「煮る」の理論的な取り扱いでは、鍋容器内での空間・時間的に変動する熱流動運動と、煮汁と食材間での熱物質輸送の効果を同時に考えなければならず、両者の効果を含む熱流動モデルの構築が必要である。

このような観点から、筆者らは煮汁 (水) で満たされた容器内で、二種類の大きさの具材 (ジャガイモ) を加熱した実験を行い、具材の大きさが煮汁の熱対流や具材自身への熱伝達において大きな影響を与えることを示した^{4,5)}。そこで本研究では、このような具材の大きさが熱流動に及ぼす効果に注目した数学的モデルを構築する。モデルでは、個々の具材が微小スケールの多孔質媒質であるだけでなく、容器内での具材の配置がより大きなスケールを持つ多孔質媒質であると仮定し、多孔質媒質での理論を「煮る」モデルに導入し熱流体流動現象の解析を行っている。

2 定式化

下面が加熱され上面が大気に接しており、側面が断熱とした鍋容器を考え、容器内の煮汁中に具材が適度に分布しているとする。以下ではまず、煮汁の温度が容器内で一様であ

る集中定数系 (1 次元) モデルを考える. 単位時間当たり外部から系への流入熱量を Q_{in} , 流出熱量を Q_{out} とする. この時, 煮汁温度 T_f と具材表面温度 T_s が等しいとすると温度変化は以下の方程式で記述される:

$$V[\varphi(\rho c_p)_f + (1 - \varphi)(\rho c_p)_s] \frac{dT_f}{dt} = Q_{in} - Q_{out}, \quad (1)$$

ここで, ρ, c_p は密度および比熱であり, 添え字 f, s は液体部, 固体部の諸量を示す. V, φ は全体積 (煮汁+具材) 及び空隙率 (=煮汁体積/全体積) である. さらに, 液面付近での大気温度を T_a , 蒸気圧を p_a とし, T_f での液体の蒸気圧を p_f , 蒸発潜熱を λ , 気体定数を R とする. このとき, Clapeyron-Clausius の式から $p_f = p_a \exp[(\lambda/R)(T_a^{-1} - T_f^{-1})]$ と書ける. さらに, 熱伝達係数 h , 蒸発面積 S , 蒸発速度 D を用いると, Q_{out} は $Q_{out} = (T_f - T_a)hS + SD(p_f - p_a)\lambda$ で表わされる.

一方, 個々の具材を直径 D_p の球とみなし, 具材内部の温度 $T_s(r, t)$ は以下の熱伝導方程式

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = A_m \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} \right), \quad (2)$$

で書けるとする. ただし, 拡散率 A_m は定数として, 具材表面温度が液体温度に等しいとして $T_s(D_p/2, t) = T_f(t)$ とする.

さらに, 具材内部の液体濃度 $C_s(r, t)$ は, 表面濃度が周囲液体濃度に等しいとして $C_s(D_p/2, t) = C_f(t)$ とするとき, 拡散方程式

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = \frac{2}{r} D_m \frac{\partial C_s}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(D_m \frac{\partial C_s}{\partial r} \right), \quad (3)$$

で表わされたとする. ただしこの場合, 拡散係数 D_m は温度の関数であるので, Arrhenius の式 $D_m = D_0 \exp(-Q/(RT_s))$ で表わせると仮定している (有効拡散係数 D_0 及び活性化エネルギー Q は物質定数).

また, 具材の硬さ F は局所的な温度 (時間の関数) だけによろとして, 初期硬さ F_0 との比において

$$\frac{F}{F_0} = \exp\left[-\int_0^t k \, dt\right], \quad (4)$$

と書ける. ここでも, 硬さは温度と関係していることから Arrhenius の式より $k = A \exp(-Q/(RT_s))$ で与えられる (頻度因子 A 及び活性化エネルギー Q は物質定数). 以上から, 煮汁濃度を一定とした場合, Q_{in} が与えられると, 式 (1)~(4) を用いて, 煮汁の温度変化や具材内部の温度, 濃度, 硬さ変化などを求めることができる.

次に, 鍋容器内での煮汁の熱流動運動による速度場や温度場の変化を考える. そのとき, (1) の代わりに以下の方程式を適当な境界条件のもとで用いる:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} / \varphi) \cdot \nabla \mathbf{u}] / \varphi \\ & = -\nabla p + A^{1/2} (\nabla^2 \mathbf{u}) / \varphi - (A^{1/2} / \text{Da}) \mathbf{u} + (0, T_f), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\partial T_f / \partial t + \sigma \mathbf{u} \cdot \nabla T_f = B^{-1/2} \nabla^2 T_f \quad (7)$$

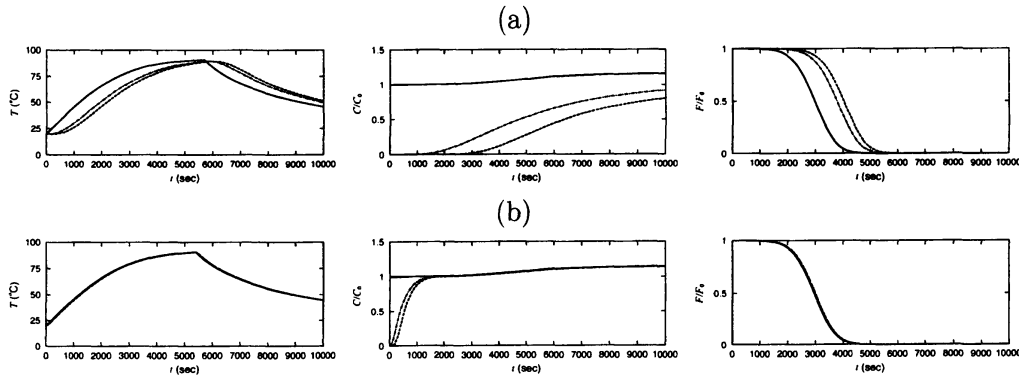


図 1: 具材中の温度, 濃度, 硬さ変化予測: 外面 ($D_p/2$), 中間 ($D_p/4$), 中心 (a) $D_p = 5.94 \text{ cm}$, (b) $D_p = 1.20 \text{ cm}$

ここで, 簡単のため系は 2 次元 (r, z) 軸対称系で, Boussinesq 近似を用いて, 具材表面温度が液温に等しいとしている. 上式で, $\nabla = (\partial/\partial r, \partial/\partial z)$, $\mathbf{u} = (u, v)$, $A = \text{Pr}/\text{Ra}$, $B = \text{Pr}/\text{Ra}$ であり, Prandtl 数 $\text{Pr} = \nu/\alpha$, Darcy 数 $\text{Da} = K/H^2$, Rayleigh 数 $\text{Ra} = g\beta\Delta TH^3/(\nu\alpha)$, $\sigma = (\rho c_p)_f / [\varphi(\rho c_p)_f + (1 - \varphi)\rho c_{p,s}]$ で定義されている.

3 計算結果

二種類のジャガイモ (大, 小) を用いた実験結果⁴⁾ から, パラメータ値は以下のように与えられる: $\varphi \simeq 0.549$, $D_p = 5.94 \text{ cm}$ (大), 1.20 cm (小), 浸透率 $K (= D_p^2 \varphi^3 / 180 (1 - \varphi)^2) = 4.64 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ (大), $1.90 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ (小).

まず 1 次元モデルを用いた解析結果の例を示す. 実験を参考にして, $0 \leq t \leq 5700$ で加熱 ($Q_{in} > 0$), $5700 < t$ で自然放熱 $Q_{in} = 0$ とする. このとき, Q_{in} は煮汁最大温度が設定した温度になるように選ぶ. 図 1 は最大温度 (T_{max}) が 90°C となるような場合のジャガイモ外面 ($D_p/2$), 中間部 ($D_p/4$), 中心部での温度, 濃度, 硬さ変化を示す ((a) 図: ジャガイモ大, (b) 図: ジャガイモ小). 図よりわかるようにジャガイモ大に比べて小の場合, 温度, 硬さ変化は具材内での差は見られず, また内部濃度はすぐに表面濃度に一致する.

一方, 図 2 は種々の具材の大きさ (D_p) や最大温度 (T_{max}) に対して, 具材中心部での温度, 濃度, 硬さ変化を示している. (a) 図は最大温度 (T_{max}) を 90°C とし具材径 D_p を 2 cm , 4 cm , 6 cm , 8 cm , 10 cm の場合を示している. 具材径が大きくなるほど温度, 濃度, 硬さ変化はともに遅くなる. また, (b) 図では具材径 D_p が 6 cm のとき最大温度を 90°C , 80°C , 70°C , 60°C , 50°C の場合について示している. この場合温度, 濃度は最大温度が高いほどより速やかに変化する. しかし, 硬さに関しては最大温度が一定値以下 ($T_{max} < 80^\circ\text{C}$) では軟らかく ($F/F_0 < 0.2$) ならず, 軟化するためにはある温度以上が必要である²⁾.

次に 3 次元モデルでの数値解析結果を示す. 簡単のため, 上下の温度差 (ΔT) を与えた場合の容器内での温度場と流れ場を示す. 実験条件⁴⁾ を参考にし以下の境界条件を課

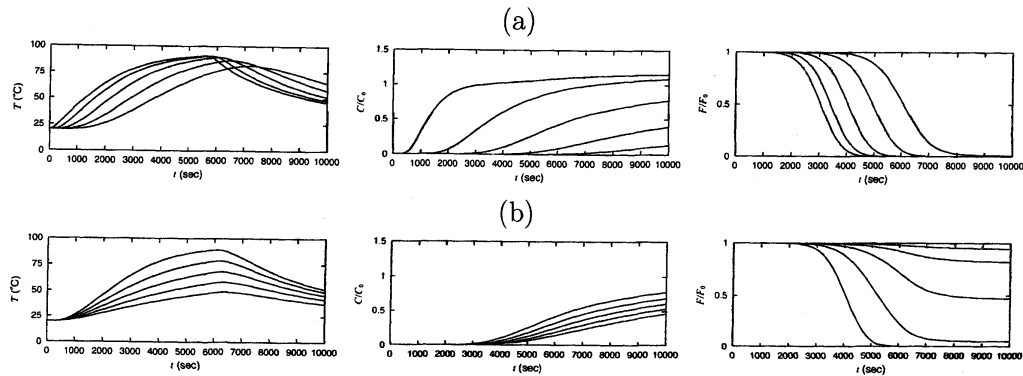


図 2: 具材径と最大温度に対する具材中心部の温度, 濃度, 硬さ変化予測: (a) D_p : 2cm, 4cm, 6cm, 8cm, 10cm ($T_{max} = 90^\circ\text{C}$), (b) T_{max} : 90°C , 80°C , 70°C , 60°C , 50°C ($D_p = 6\text{cm}$)

す: 上面 ($\partial u/\partial z = 0, v = 0, T = T_1$), 側面 ($u = v = 0, \partial T/\partial r = 0$), 下面 ($u = v = 0, \partial T/\partial z = 0$ ($0 \leq r \leq R_1, R_2 \leq r \leq R$), $T = T_0$ ($R_1 < r < R_2$)). この条件のもとで有限差分法 (SMAC, 風上差分) を用いて解析を行った. 十分時間が経った後の容器内での温度および速度分布を図 3 に示す. 図 (a) では $\Delta T = 0.1, Ra Da = 695, Da = 3.8 \times 10^{-4}$, (b) は $\Delta T = 0.1, Ra Da = 27.4, Da = 1.5 \times 10^{-5}$ の場合を示している. 両者とも温度差が小さい場合であるが, Darcy 数が大きくなる (具材径が大きくなる) ほど対流がおりやすく, それに伴って容器内での温度分布は異なる. しかし, 温度差を大きくした場合, 図 (c) $\Delta T = 1.0, Ra Da = 6950, Da = 3.8 \times 10^{-4}$ 及び図 (d) $\Delta T = 1.0, Ra Da = 274, Da = 1.5 \times 10^{-5}$ よりわかるように, Darcy 数が大きい場合にはより強く対流がおり, 容器内での温度分布はより均一になっている. また, Darcy 数が小さい (具材径が小さい) 場合でも対流が始まっていることがわかる.

4 結論

以上の結果をまとめて示す.

- i) 適切なパラメータ値を設定した集中定数系モデルにより, 流体部や具材内部のおおまかな温度, 濃度, 硬さ予測が可能である.
- ii) 具材内の濃度変化は具材の大きさに依存するが, 最終的にはすべての場所での濃度は等しくなる. 一方, 硬さ変化は最大温度に依存し, 最大温度がある程度高くなければ時間をかけても具材は軟らかくならない.
- iii) 容器内での温度分布は具材の硬さの違いに大きく影響を及ぼすため, 3次元モデルでの解析でより詳しい温度分布を知る必要がある.

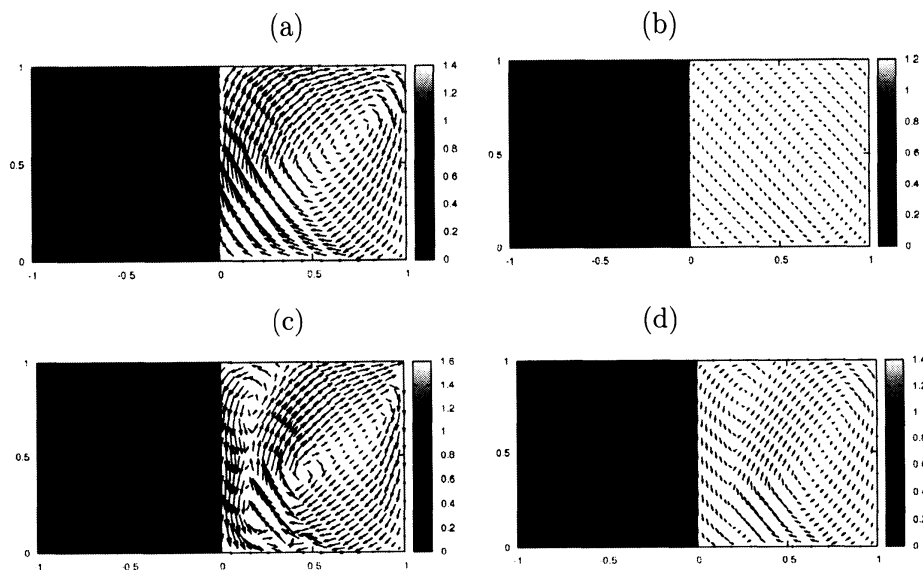


図 3: 温度-速度分布 ($T/\Delta T, \mathbf{u}/(g\beta\Delta TH)^{1/2}$) (a) $\Delta T = 0.1, Ra Da = 695, Da = 3.8 \times 10^{-4}$, (b) $\Delta T = 0.1, Ra Da = 27.4, Da = 1.5 \times 10^{-5}$, (c) $\Delta T = 1.0, Ra Da = 6950, Da = 3.8 \times 10^{-4}$, (d) $\Delta T = 1.0, Ra Da = 274, Da = 1.5 \times 10^{-5}$

iv) 1次元モデルと3次元モデルの併用により、より詳しい具材や煮汁の温度・濃度分布および硬さの予測が可能である。

本研究は科研費 (No.22500749) の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 渋川祥子: 日本食生活学会誌, **17**(2006)89.
- 2) 香西みどり他: 日本調理科学会誌, **32**(1999)296.
- 3) A.K.Datta: J.Food Eng. **80**(2007)80.
- 4) 原知子, 吉永隆夫: 神戸山手短期大学紀要 **54**(2011)89.
- 5) 吉永隆夫, 原知子: 固体液体間で熱物質輸送を伴う多孔質媒質中での熱対流現象, 京都大学数理解析研究所講究録, **1761** (2011)191.